T O P O L O G I A

WPPT, sem. letni
LISTA 13 - Topologia ogólna

Wrocław, 23 lutego 2013

ZADANIE 1. Wykaż, że
a) każda baza topologii $\mathcal{T}$ jest bazą,
b) każda baza jest bazą **jedynej** topologii,
c) każda topologia posiada bazę,
d) jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą to $\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ jest bazą otoczeń w punkcie x,
e) jeśli w każdym punkcie x mamy bazę otoczeń $\mathcal{B}_x$, to $\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ jest bazą topologii.

ZADANIE 2. Udowodnij implikacje pomiędzy kolejnymi aksjomatami rozdzielania.

ZADANIE 3. Podaj przykłady przestrzeni topologicznych dowodzące istotnego zawierania klas T_i ($i = 0, 1, 2, 3, 3.5, 4, 5, 6$). Wskaż możliwie oszczędne bazy w tych przestrzeniach.

ZADANIE 4. Sprawdź, że w przestrzeni Hausdorffa granica netu jest jedyna.

ZADANIE 5. Sprawdź, że ciągłość funkcji pomiędzy przestrzeniami topologicznymi jest równoważna z ,,netową definicją Heinego" w każdym punkcie.

ZADANIE 6. Wykaż, że $x \in \bar{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest granicą netu zawartego w A.

ZADANIE 7. Wykaż, że przestrzeń topologiczna X jest zwarta (pokryciowo) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy net ma podnet zbieżny.

ZADANIE 8. Który aksjomat przeliczalności wystarcza, aby ciągłość funkcji, należenie do domknięcia, zwartość (jak w zadaniach 5-7) można było weryfikować przy pomocy zwykłych ciągów?

ZADANIE 9. Sparwdź, że baza Tichonowa w przestrzeni produktowej $\Pi_i X_i$ jest rzeczywiście bazą.

ZADANIE 10. Sprawdź, że zbieżność netu w topologii Tichonowa jest zbieżnością po współrzędnych. Wywnioskuj, że projekcje $\{x_i\}_{i \in I} \mapsto x_{i_0}$ są ciągłe.

ZADANIE 11. Udowodnij Twierdzenie Tichonowa.

Tomasz Downarowicz